Annex A
(informative)

Theory

This annex is an explanation of the definitions given in clause 3.

A.1 Fuzzy Logic

In *fuzzy logic,* linguistic values and expressions are used to describe physical variables, instead of the names, numbers (usually real numbers) used in conventional open and closed-loop control systems. The terms "low" or "wide-open" are designated as *linguistic terms* of the physical values "temperature" or "heating valve opening". If an input variable is described by *linguistic terms*, it is referred to as a *linguistic value*.

Each *linguistic term* is described by a *fuzzy Set* M. It is thus unequivocally defined mathematically by the two statements basic set G and *membership function* μ. The *membership function* states the membership of every element of the universe of discourse G (e.g. numerical values of a time scale [age in years]) in the set M (e.g. "young") in the form of a numerical value between zero and one. If the *membership function* for a specific value is one, then the linguistic statement corresponding to the *linguistic term* applies in all respects (e.g. "young" for an age of 20 years). If, in contrast, it is zero, then there is absolutely no agreement (e.g. "very old" for an age of 20 years).

The following notations are used to describe *fuzzy sets*:

for finite sets: as unordered, paired sets in incremental form:

$$M = \{(x_1,\mu_M(x_1)),\ (x_2,\mu_M(x_2)),..,(x_n,\mu_M(x_n))\},\quad x_i \in G,\ i=1,2,..n \tag{A.1}$$

the $\mu_M(x_i)$ are listed as numerical values.

for infinite sets:

$$M = \{x,\ \mu_M(x)\},\qquad x \in G \tag{A.2}$$

In order to more clearly illustrate the differences between *crisp* and *fuzzy* terms, the *linguistic terms* of the *linguistic variable* "Age" are represented in figure A.1. While "full legal age" is unequivocally stipulated by law, and thus displays a discrete transition in relation to the *membership function*, a crisp age limit may not be given for "adult".

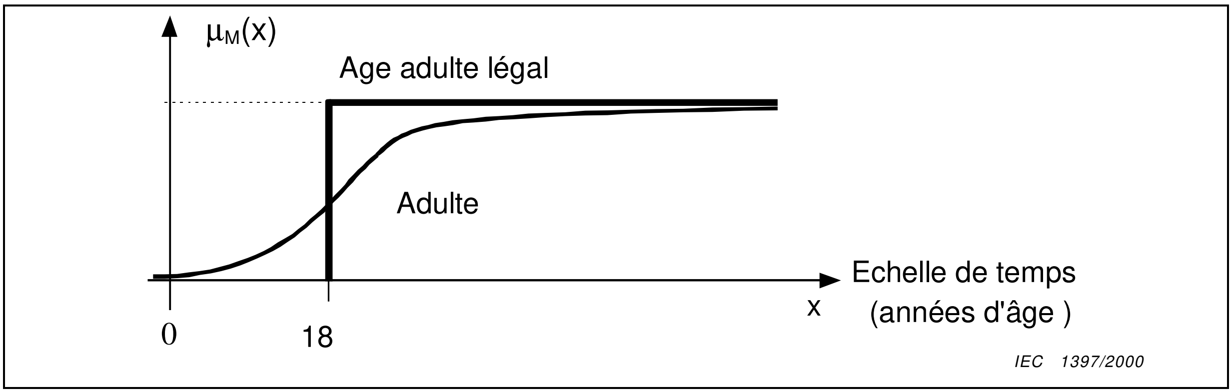

Figure A.1 – Fonctions d'appartenance pour les termes «âge adulte légal» et «adulte»

L'exemple illustré à la figure A.2 présente une description de la *variable linguistique* «Age» par des *termes linguistiques* et leur hiérarchie sur l'échelle de temps «années d'âge» au moyen de *valeurs d'appartenance*.

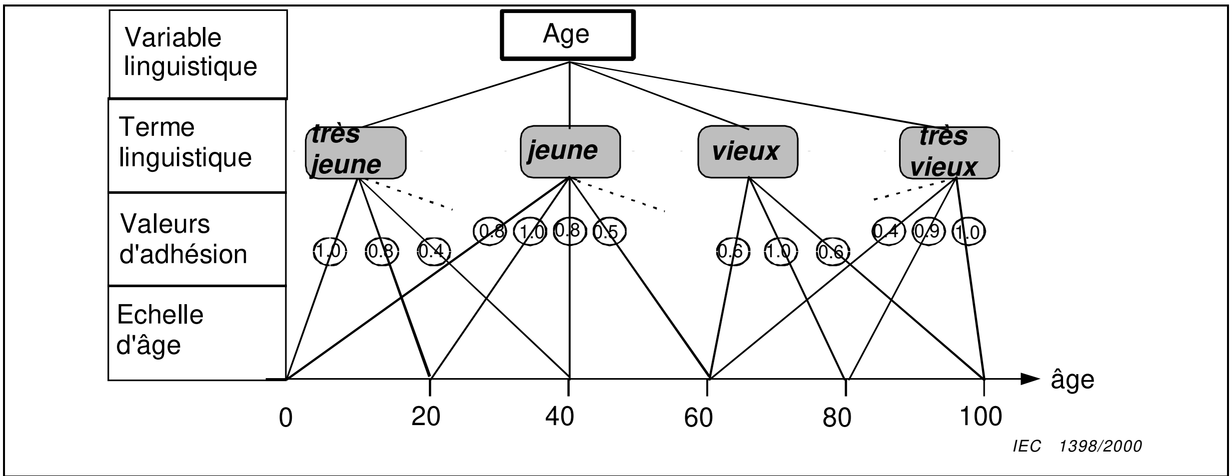

Figure A.2 – Description de la variable linguistique «Age» par des termes linguistiques et par leur hiérarchie sur l'échelle de temps (années d'âge)

Des profils typiques de *fonctions d'appartenance* sont représentés à la figure A.3. Les profils suivants sont des profils spéciaux:

– la définition par un rectangle (ex. intervalle) pour décrire des *valeurs*, ainsi que

– le *«singleton»,* pour la représentation alternative des variables de sortie.

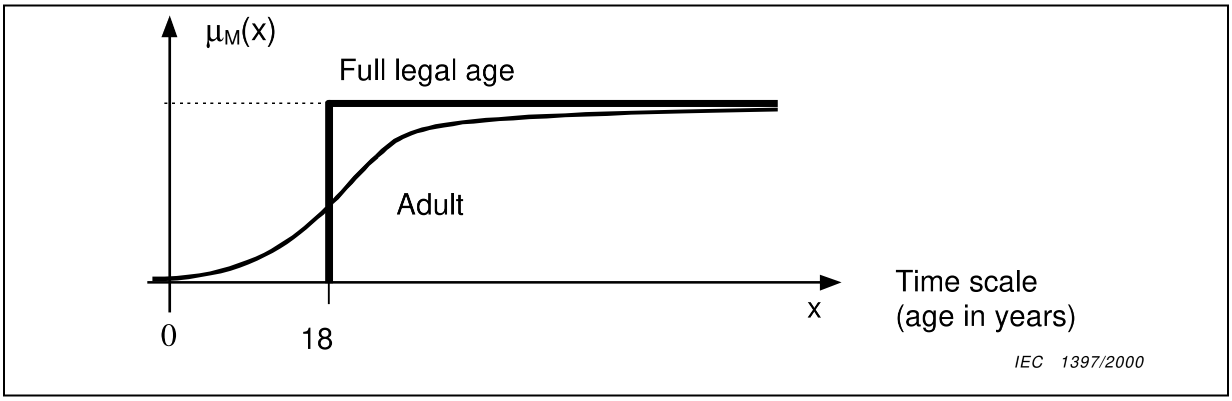

Figure A.1 – Membership functions of the terms "full legal age" and "adult"

As an example, figure A.2 shows the description of the *linguistic variable* "Age" by *linguistic terms* and their hierarchy on the time scale "age in years" by means of *membership values*.

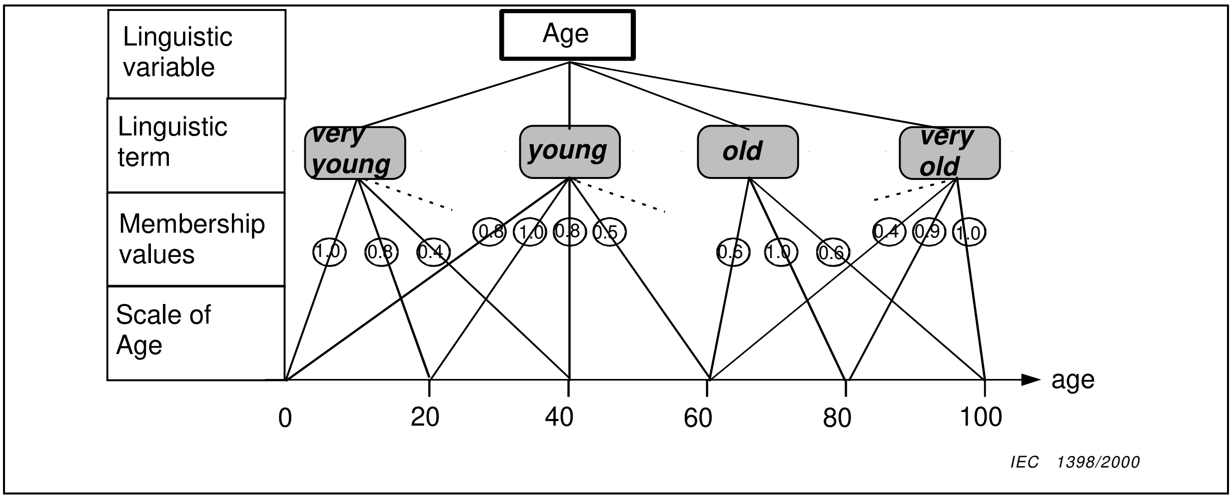

Figure A.2 – Description of the linguistic variable "Age" by linguistic terms and their hierarchy on the time scale (age in years)

Typical forms of the *membership functions* are represented in figure A.3. The following count as special forms:

– the definition via the rectangle (e.g. interval) in order to describe *values*, as well as

– the *"singleton",* for the alternative representation of output variables.

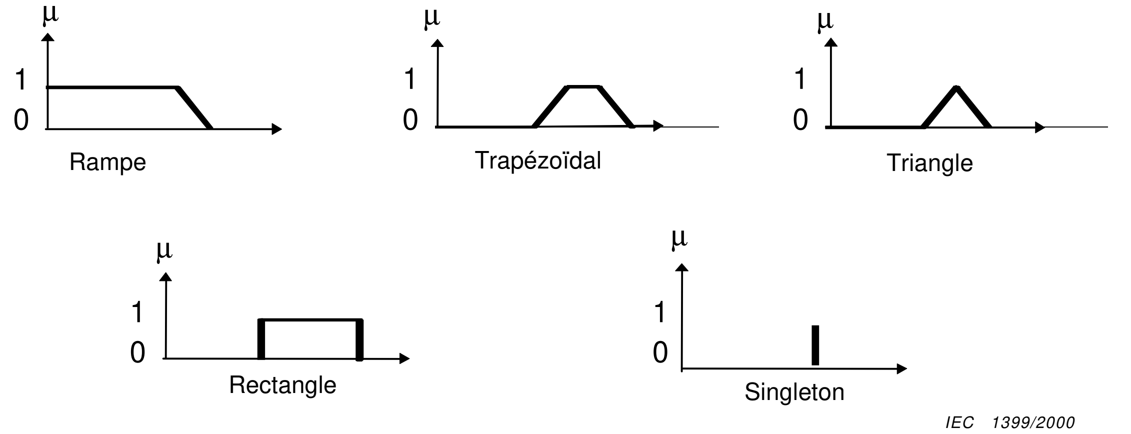

Figure A.3 – Profils de fonctions d'appartenance fréquemment utilisés

Une expression dans laquelle des *variables linguistiques* sont associées à des *termes linguistiques* représente un *énoncé linguistique* en *logique floue*. Les expressions telles que «La température est élevée» ou «La température est basse», dont la structure de base est

Variable linguistique – Symbole de comparaison – Terme linguistique	(A.3)
(La température est basse)	

sont des énoncés linguistiques.

Contrairement à la logique classique, selon laquelle une affirmation est soit «vraie» soit «fausse» (un des deux états Booléens), un énoncé linguistique en logique floue possède un degré d'appartenance.

La connaissance empirique peut être décrite par des règles. La règle R_k prend la forme suivante:

R_k: IF *condition* P_k THEN *conclusion* C_k	(A.4)

Dans ce contexte, la *condition* de chaque *règle* comporte un énoncé linguistique ou une combinaison d'énoncés définis par les variables d'entrée, alors que la *conclusion* fournit une variable de sortie sous la forme d'une instruction d'action spécifique.

P_k = A AND B OR (NOT C)	(A.5)

Si la *condition* et/ou la *conclusion* sont déterminées par des *énoncés linguistiques*, la *règle* est alors également appelée *règle linguistique*. Par ailleurs, une *base de règles* est un regroupement de plusieurs *règles*. En général, plusieurs *règles* s'appliquent (sont «activées») en même temps, contrairement aux systèmes régis par des règles classiques. Par conséquent, il faut que les résultats des règles soient combinés entre eux par les *opérateurs* mathématiques correspondants.

Les relations entre les *ensembles flous* et les *opérations* sur *ensembles flous* sont définies par les *fonctions d'appartenance*:

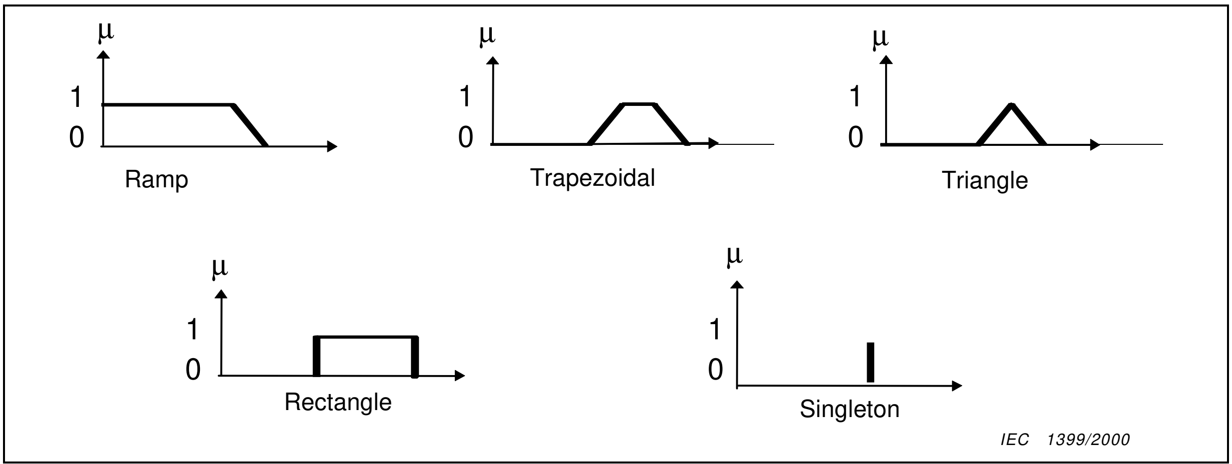

Figure A.3 – Commonly used shapes of membership functions

An expression in which *linguistic variables* are related to *linguistic terms* represents a *linguistic statement* in *fuzzy logic*. Expressions such as "Temperature is high" or "Temperature is low", with the simple basic structure of

Linguistic variable – Symbol of comparison – Linguistic term (Temperature is low)	(A.3)

are referred to here as linguistic statement.

In contrast to classical logic, in which statements only assume one of the Boolean states "true" or "false", linguistic statements in fuzzy logic possess a degree of membership.

Empirical knowledge may be defined in rules. Rule R_k has the following form:

R_k: IF *condition* P_k THEN *conclusion* C_k	(A.4)

In this context, the *condition* of each *rule* comprises a linguistic statement or a combination of statements via the input variables, while the *conclusion* determines the output variable in the sense of an instruction to act.

P_k = A AND B OR (NOT C)	(A.5)

If *condition* and/or *conclusion* are determined by *linguistic statements*, the *rule* is then also referred to as a *linguistic rule*. A *rule base*, in turn, consists of several *rules* together. In general, several *rules* apply ("fire") at the same time in contrast to classical rule-based systems. Therefore, the results of the rules must be combined with one another via corresponding mathematical *operators*.

Relationships between *fuzzy sets* and *operations* with *fuzzy sets* are defined by the *membership functions*:

Les relations suivantes s'appliquent entre deux *ensembles flous*, A et B, dont les éléments x proviennent d'un ensemble de base G:

égalité A = B,

est vraie si $\mu_A(x) = \mu_B(x)$, quel que soit $x \in G$ (A.6)

inclusion complète $A \subseteq B$,

est vraie si $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$, quel que soit $x \in G$ (A.7)

inclusion partielle $A \subset B$,

est vraie si $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$, quel que soit $\in G$

et $\mu_A(x) < \mu_B(x)$ pour au moins un $x \in G$. (A.8)

Les *opérations* suivantes peuvent être stipulées entre deux *ensembles flous*, A et B, dont les éléments x proviennent d'un ensemble de base G:

l'*intersection*

$A \cap B$ est définie par $\mu_{A \cap B}(x)=I(\mu_A(x), \mu_B(x))$, (A.9)

où I représente l'opérateur d'intersection

l'*union*

$A \cup B$ est définie par $\mu_{A \cup B}(x)=U(\mu_A(x), \mu_B(x))$, (A.10)

où U représente l'opérateur d'union

le *complément* est défini par $\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$ (A.11)

Comme pour les ensembles «nets» (classiques), les interprétations suivantes s'appliquent aux ensembles flous:

l'*intersection* est associée à l'opérateur flou ET,
l'*union* est associée à l'opérateur flou OU,
le *complément* est associé à l'opérateur flou PAS.

Les algorithmes élémentaires pour l'implémentation mathématique d'intersection, union et complément sont les suivants (voir aussi figure A.4):

pour l'*intersection,* le minimum

$\mu_{A \cap B}(x) = \mathrm{Min}\ \{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$, $x \in G$ (A.12)

pour l'*union*, le maximum

$\mu_{A \cup B}(x) = \mathrm{Max}\ \{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$, $x \in G$ (A.13)

pour le *complément*, soustraction de un

$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$ $x \in G$ (A.14)

De nombreuses possibilités d'algorithmes existent pour les opérateurs flous ET et OU, mais il convient de mentionner que les opérateurs ET et OU ne peuvent pas être choisis de manière arbitraire.

The following relationships apply between two *fuzzy sets*, A and B, whose elements x originate from a basic set G:

equality $A = B$,		
is true if $\mu_A(x) = \mu_B(x)$,	for all $x \in G$	(A.6)
complete inclusion $A \subseteq B$,		
is true if $\mu_A(x) \le \mu_B(x)$,	for all $x \in G$	(A.7)
partial inclusion $A \subset B$,		
is true if $\mu_A(x) \le \mu_B(x)$,	for all $x \in G$	
and $\mu_A(x) < \mu_B(x)$	for at least one $x \in G$.	(A.8)

The following *operations* may be stipulated between two *fuzzy sets*, A and B, whose elements x originate from a basic set G:

the intersection	
$A \cap B$ is defined by $\mu_{A \cap B}(x) = I(\mu_A(x), \mu_B(x))$,	(A.9)
where I is called the intersection operator	
the union	
$A \cup B$ is defined by $\mu_{A \cup B}(x) = U(\mu_A(x), \mu_B(x))$,	(A.10)
where U is called the union operator	
the complement	
is defined by $\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$	(A.11)

As with classical (*crisp*) sets, the following interpretations apply to fuzzy sets:

the *intersection* is related to the fuzzy operator AND,
the *union* is related to the fuzzy operator OR,
the *complement* is related to the fuzzy operator NOT.

Elementary algorithms for mathematical implementation of intersection, union and complement are the following (see also figure A.4):

for the *intersection,* the minimum		
$\mu_{A \cap B}(x) = \mathrm{Min}\ \{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$,	$x \in G$	(A.12)
for the *union*, the maximum		
$\mu_{A \cup B}(x) = \mathrm{Max}\ \{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$,	$x \in G$	(A.13)
for the *complement*, subtraction from one		
$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$	$x \in G$	(A.14)

There are a lot of possible algorithms for AND and OR fuzzy operators. It is worth noting here, that AND and OR operators cannot be chosen in an arbitrary way.

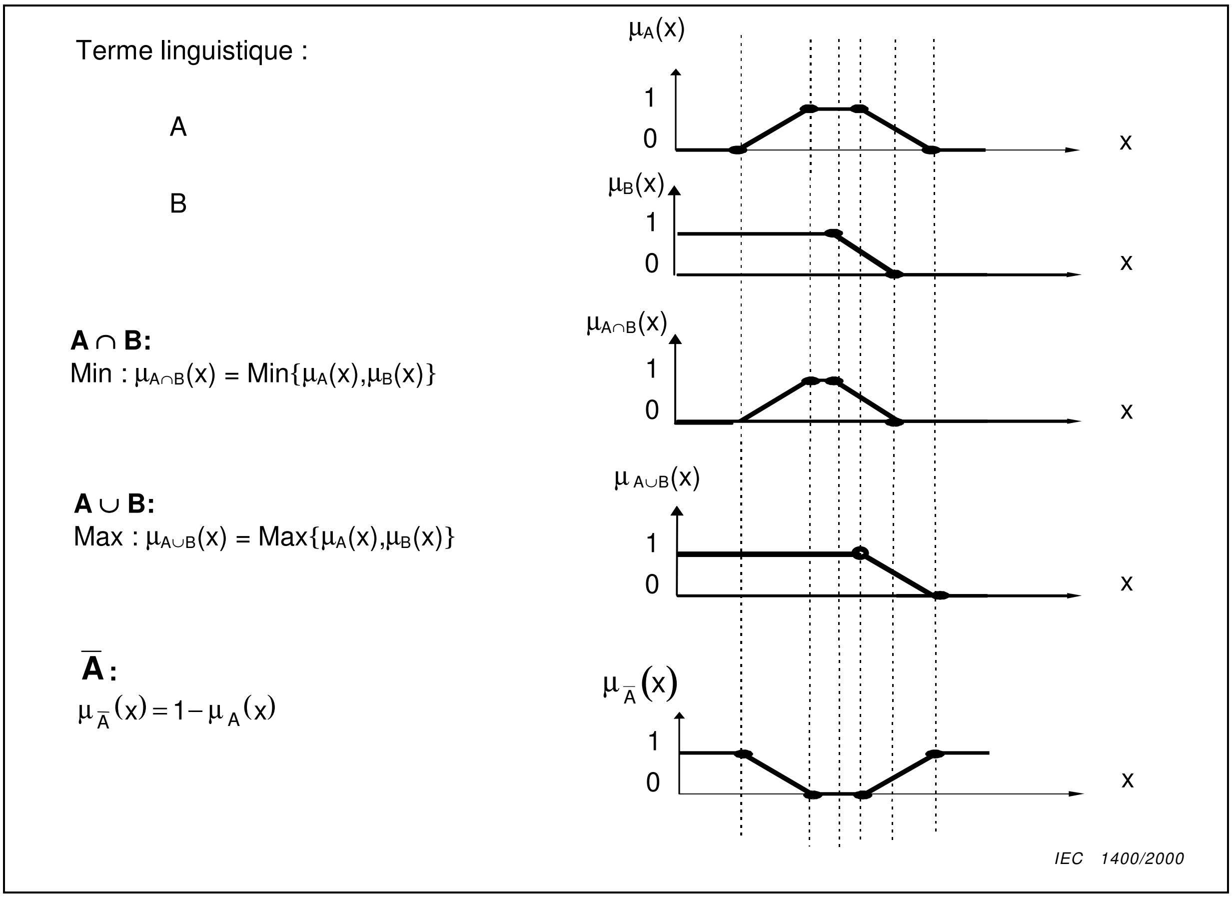

Figure A.4 – Algorithmes pour l'implémentation d'opérations entre deux fonctions d'appartenance

A.2 Contrôle flou

Le contrôle flou se traduit par la possibilité de contrôler des processus techniques en boucle ouverte ou fermée, y compris le traitement de valeurs mesurées, au moyen de règles floues et de leur traitement par logique floue.

Les informations d'entrée comportent des variables réelles sous forme de variables de processus mesurables, variables dérivées et points de consigne. Les variables de sortie sont des variables réelles sous forme de variables de correction. Il faut que des transformations se produisent entre les variables d'entrée et de sortie du processus et le monde flou (fuzzification, défuzzification). Les règles linguistiques de la base de règles et l'inférence constituent l'élément de base du contrôle flou.

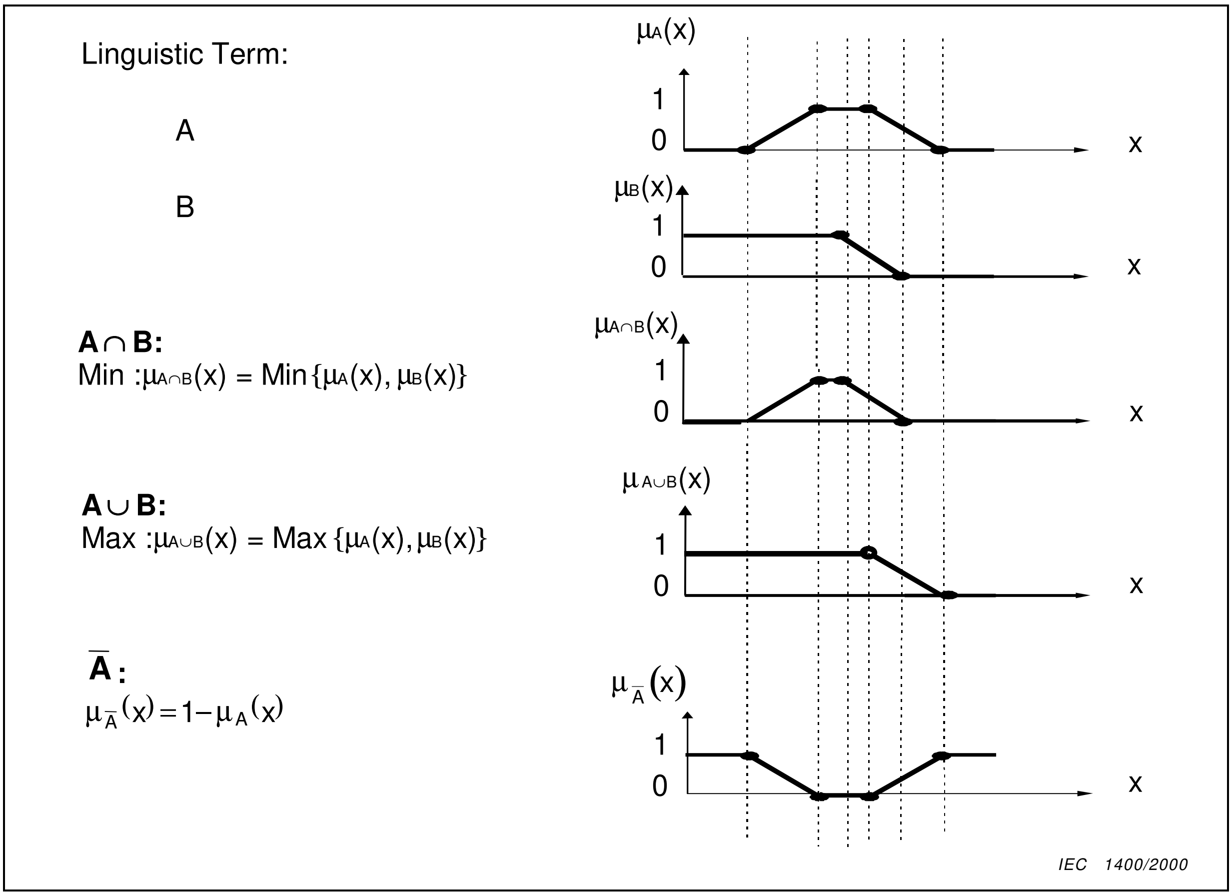

Figure A.4 – Algorithms for implementing operations between two membership functions

A.2 Fuzzy Control

Fuzzy control means the open and closed-loop control of technical processes, including the processing of measured values, which is based on the use of fuzzy rules and their processing with the help of fuzzy logic.

The input information comprises real variables in the form of measurable process variables, derived variables, as well as set points. The output variables are real variables in the form of correcting variables. Transformations must be performed between the input and output variables of the process and the fuzzy world (fuzzification, defuzzification). The core component of fuzzy control consists of the linguistic rules of the rule base and the inference.

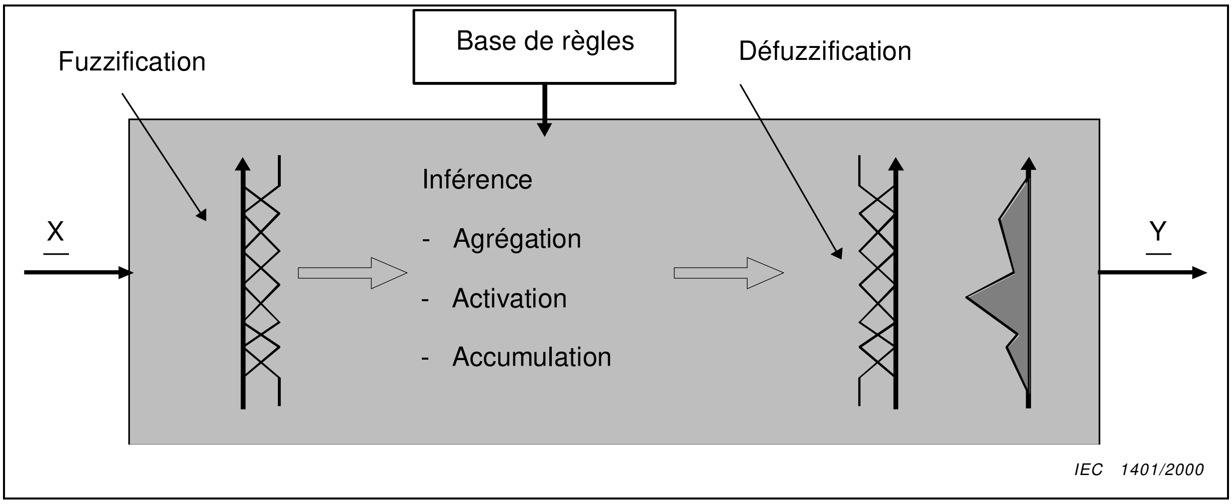

Figure A.5 – Structure et éléments fonctionnels du contrôle flou

Les éléments fonctionnels de *Contrôle flou*, évoqués plus haut et représentés à la figure A.5, sont décrits ci-dessous.

A.2.1 Fuzzification

Le calcul de la correspondance entre les variables d'entrée et les *termes linguistiques* est appelé *fuzzification*. Pour ce calcul, le degré d'appartenance réel des variables d'entrée est déterminé pour chaque *terme linguistique* de la *variable linguistique* correspondante.

Un exemple de *fuzzification* est illustré à la figure A.6.

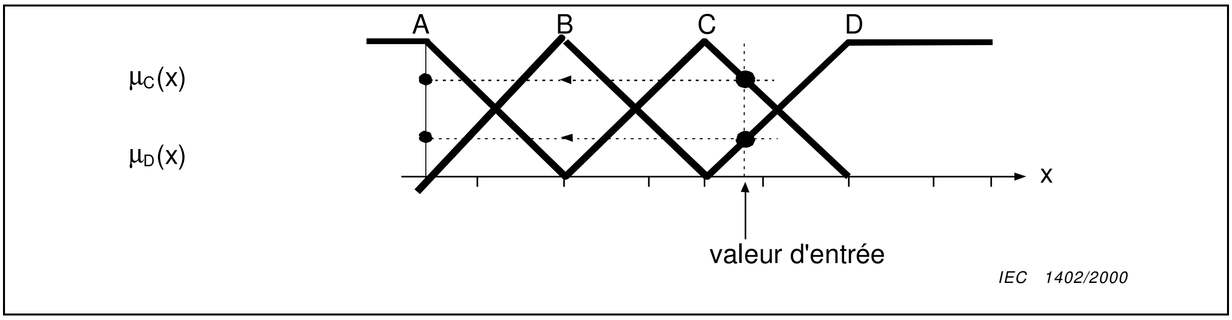

Figure A.6 – Principe de fuzzification (exemple)

A.2.2 Base de règles

La *base de règles* contient la connaissance empirique associée à l'exécution d'un processus particulier. Des *règles linguistiques* sont utilisées pour représenter la connaissance. Si l'opérateur flou ET correspond à MIN et l'opérateur flou OU à MAX, il est facilement démontré qu'une règle floue R_j basée sur une combinaison OU de m énoncés peut être représentée par m règles, dont les énoncés ne sont combinés que par des ET. Des exemples de différentes représentations de règles sont présentés à la figure A.7 et à la figure A.8.

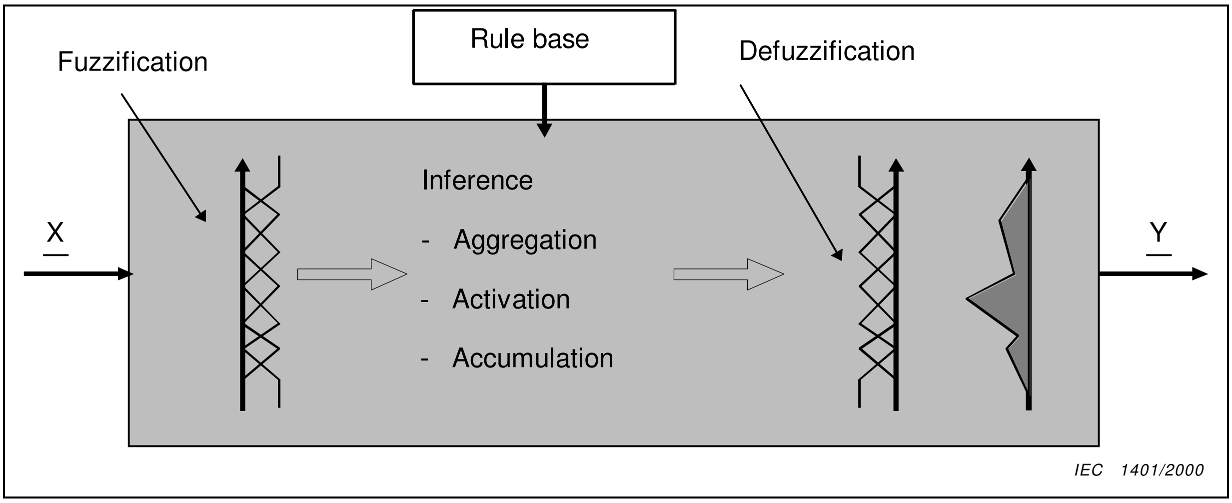

Figure A.5 – Structure and functional elements of fuzzy control

The functional elements of *fuzzy control*, mentioned above and represented in figure A.5, are explained below.

A.2.1 Fuzzification

The determination of the matching of input variables with the *linguistic terms* is referred to as *fuzzification*. To this end, the actual degree of membership for input variables is determined for each *linguistic term* of the corresponding *linguistic variable*.

Figure A.6 shows an example of *fuzzification.*

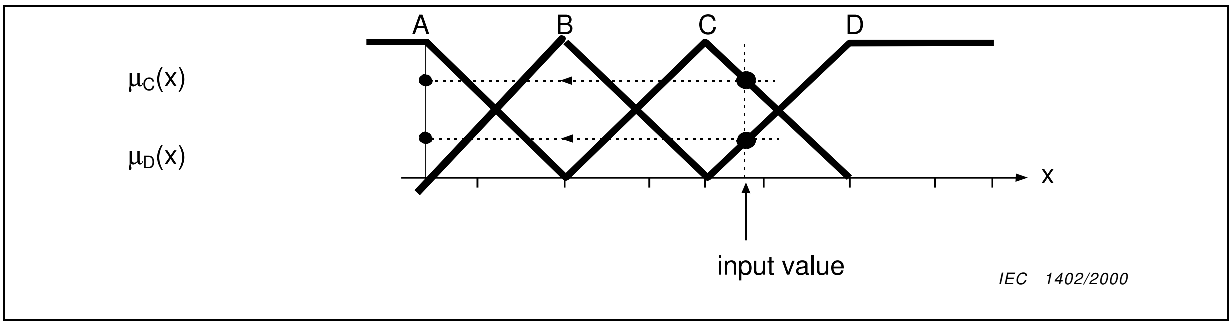

Figure A.6 – The principle of fuzzification (as an example)

A.2.2 Rule base

The *rule base* contains empirical knowledge concerning the operation of a particular process under consideration. *Linguistic rules* are used to represent the knowledge. Provided that the AND fuzzy operator is MIN and the OR fuzzy operator is MAX, it can easily be shown that a fuzzy rule R_j based on an OR combination of m statements may be represented by m rules, whose statements are only combined by AND. Figure A.7 and figure A.8 are examples of different rule representations.